EJERCICIOS RESUELTOS

MAGNITUDES FISICAS Y ANALISIS DIMENSIONAL

1. El período de un péndulo simple está dado por la siguiente ecuación:

$$T = KL^a g^b$$

En donde:

- K : constante numérica
- L : longitud
- g : aceleración de la gravedad
- a y b : exponentes

Hallar el valor de "$a+b$"

a) 2 b) 3 c) 1
d) -1 e) 0

Solución:

Usando las ecuaciones dimensionales:

$$[T] = \left[KL^a g^b\right]$$

$$T = [K][L]^a[g]^b$$

$$T = (1).L^a.\left(LT^{-2}\right)^b$$

$$T = L^{a+b}T^{-2b}$$

Dando forma y comparando exponentes:

$$L^0T = L^{a+b}T^{-2b} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -2b=1 \end{cases}$$

De las ecuaciones: $a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}$

$$a+b = \boxed{0}$$ **Rpta.**

2. La velocidad de una onda transversal en una cuerda elástica se establece con:

$$V = F^x \mu^y$$

- F : Tensión en la cuerda (fuerza)
- μ : Densidad lineal de la cuerda (kg/m)

Hallar la fórmula física.

a) $\frac{1}{\mu}\sqrt{F}$ b) $\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ c) $\sqrt{\frac{\mu}{F}}$
d) $F\sqrt{\mu}$ e) $\sqrt{\mu F}$

Solución:

La densidad lineal (μ) es el cociente entre la masa y la longitud.

$$\mu = \frac{m}{L}$$

$$[\mu] = \frac{[m]}{[L]} = L^{-1}M$$

La velocidad será:

$$[V] = [F]^x[\mu]^y$$

$$LT^{-1} = \left(LMT^{-2}\right)^x\left(L^{-1}M\right)^y$$

$$LM^0T^{-1} = L^{x-y}M^{x+y}T^{-2x}$$

Igualando exponentes:

$$-2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

La fórmula de la velocidad será:

$$V = F^{\frac{1}{2}}\mu^{-\frac{1}{2}}$$

$$V = \boxed{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$ **Rpta.**

3. Hallar la ecuación dimensional de la magnitud "C" en la expresión:

$$P = P_0\left[e^{\frac{mV^2}{2C\theta E}} - 1\right]$$

a) $M\theta$ b) θ^{-2} c) θ^{-3}
d) θ^{-1} e) $L\theta^{-1}$

Solución:
Recuerde que la ecuación dimensional de un exponente es uno.

$[\text{exponente}]=1$

Luego:

$$\left[\frac{mV^2}{2C\theta E}\right]=1$$

$$\underbrace{[mV^2]}_{\text{Energía}}=[2][C][\theta][E]$$

La energía tiene la misma ecuación dimensional que el trabajo.

$$M(LT^{-1})^2=(1)[C]\theta\left(L^2MT^{-2}\right)$$

$$[C]=\boxed{\theta^{-1}}\quad \textbf{Rpta.}$$

4. En la ecuación de dimensiones correctas F es fuerza. Hallar las dimensiones de "s". R: radio.

$$\frac{\text{senx}\sqrt{V^2+A^3}}{F}=\frac{10V\left(R^3+r^3\right)^{\frac{1}{3}}}{xs}$$

a) LMT^{-2} b) LM^2T^{-2} c) L^2MT^2
d) L^2MT^{-1} e) L^2MT^{-2}

Solución:
En la raíz cuadrada se cumple que:

$$[V^2+A^3]=[V]^2=[A]^3 \qquad \ldots (1)$$

En la raíz cúbica se cumple que:

$$[R^3+r^3]=[R]^3=[r]^3 \qquad \ldots (2)$$

La ecuación dimensional de una suma es igual a la ecuación dimensional de cada sumando:

$$[A+B^2-C^3]=[A]=[B]^2=[C]^3$$

$$\frac{[\text{senx}]\sqrt{[V^2+A^3]}}{[F]}=\frac{[10V][R^3+r^3]^{\frac{1}{3}}}{[x][s]}$$

Reemplazando (1) y (2) en la ecuación:

$$\frac{[\text{senx}]\sqrt{[V]^2}}{[F]}=\frac{[V][R^3]^{\frac{1}{3}}}{[x][s]}$$

$$\frac{[V]}{[F]}=\frac{[V][R]}{[x][s]}$$

$$[s]=[F][R]$$

$$[s]=LMT^{-2}.L$$

$$[s]=\boxed{L^2MT^{-2}}\quad \textbf{Rpta.}$$

5. En la expresión correctamente dimensional, V: velocidad, hallar $[B]$.

$$\sqrt{A+B^2+C^3}=\frac{AV\log 20}{\sqrt[3]{B+D}}$$

a) $L^{\frac{3}{2}}T^{\frac{3}{2}}$ b) $L^{\frac{3}{2}}T^{-\frac{3}{2}}$ c) $L^{-\frac{3}{2}}T^{\frac{3}{2}}$
d) $M^{-\frac{3}{2}}T^{\frac{3}{2}}$ e) $L^{-\frac{3}{2}}M^{\frac{3}{2}}$

Solución:
En la raíz cuadrada se cumple:

$$[A+B^2+C^3]=[B]^2 \qquad \ldots (1)$$

En la raíz cúbica se cumple:

$$[B+D]=[B] \qquad \ldots (2)$$

Principio de homogeneidad en la ecuación general:

$$\sqrt{[A+B^2+C^3]}=\frac{[A][V][\log 20]}{\sqrt[3]{[B+D]}} \qquad \ldots (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$\sqrt{[B]^2}=\frac{[B]^2[V][1]}{\sqrt[3]{[B]}}$$

$$[B][B]^{-\frac{1}{2}}[B]^{-2}=[V]$$

$$[B]^{-\frac{2}{3}}=LT^{-1}$$

$$[B]=\boxed{L^{-\frac{3}{2}}T^{\frac{3}{2}}}\quad \textbf{Rpta.}$$

6. Si la ecuación es homogénea y contiene volúmenes (V_1, V_2), masa (M), trabajos (W_1, W_2) y aceleración (a) encuentre $[y]$.

$$(W_1 - W_2)a = \frac{(V_1 - V_2)M}{y\log x}$$

a) T^4 b) T^2 c) MT^{-4}
d) MT^4 e) LT^3

Solución:
Por la ley de homogeneidad:

$$[W_1 - W_2] = [\text{Trabajo}] = [W]$$

$$[V_1 - V_2] = [\text{Volumen}] = [V]$$

La ecuación se reduce a:

$$Wa = \frac{VM}{y\log x}$$

$$[W][a] = \frac{[V]M}{[y][\log x]}$$

$$(L^2MT^{-2})(LT^{-2}) = \frac{L^3M}{[y](1)}$$

$$[y] = \frac{L^3M}{L^3MT^{-4}}$$

$$[y] = \boxed{T^4} \quad \textbf{Rpta.}$$

7. Si en la ecuación, las dimensiones están correctamente expresadas, hallar "α".

$$\sqrt[3]{A^2 - B^3} = AB^{\cos\alpha}\tan\alpha$$

a) 30° b) 150° c) 90°
d) 120° e) 53°

Solución:
Elevando al cubo:

$$A^2 - B^3 = A^3B^{3\cos\alpha}\tan^3\alpha$$

Por el principio de homogeneidad:

$$[A]^2 = [B]^3 = [\tan\alpha]^3[A]^3[B]^{3\cos\alpha}$$

$$[A]^2 = [B]^3 \;\Rightarrow\; [A] = [B]^{\frac{3}{2}} \quad \ldots (1)$$

$$[B]^3 = [\tan\alpha]^3[A]^3[B]^{3\cos\alpha}$$

$$[B] = [A][B]^{\cos\alpha} \quad \ldots (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$[B] = [B]^{\frac{3}{2}}[B]^{\cos\alpha}$$

$$[B] = [B]^{\frac{3}{2}+\cos\alpha}$$

Igualando exponentes:

$$1 = \frac{3}{2} + \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \alpha = \boxed{120^\circ} \quad \textbf{Rpta.}$$

8. La ley de Ohm establece que:

$$V = IR$$

Encontrar la ecuación dimensional de la resistencia eléctrica "R" si se sabe que:

I : intensidad de corriente
V : diferencia de potencial; equivale al trabajo por unidad de carga

a) $LMT^{-3}I^{-2}$ b) $L^2MT^{-3}I$
c) $L^2M^2TI^{-2}$ d) $L^3MT^{-3}I^{-2}$
e) $L^2MT^{-3}I^{-2}$

Solución:
La diferencia de potencial es entonces:

$$V = \frac{W}{Q} \;\Rightarrow\; [V] = \frac{[W]}{[Q]} \quad \ldots (1)$$

La carga se deduce de:

$$I = \frac{Q}{t} \;\Rightarrow\; [Q] = IT \quad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$[V] = \frac{L^2MT^{-2}}{IT} \;\Rightarrow\; [V] = L^2MT^{-3}I^{-1} \quad \ldots (3)$$

En la Ley de Ohm:

$$V = IR$$

$$[V] = [I][R] \quad \ldots (4)$$

Reemplazando (3) en (4):

$$I[R] = L^2MT^{-3}I^{-1}$$

$$[R] = \boxed{L^2MT^{-3}I^{-2}}$$

9. El efecto Joule establece que si por una resistencia eléctrica "R" circula una corriente "I" durante un tiempo "t", el calor desprendido de la resistencia se puede expresar como energía. Hallar la fórmula que nos permite confirmar dicha afirmación.

a) I^2Rt b) IRt c) I^2R^2t

d) $\dfrac{I^2R}{t^3}$ e) $\dfrac{I^2R}{t^2}$

Solución:
Del enunciado se deduce que el calor tiene la siguiente fórmula:

$$Q = I^xR^yt^z$$

Recuerde del problema 8: $[R] = L^2MT^{-3}I^{-2}$
Aplicando ecuaciones dimensionales:

$$[Q] = [\text{Energía}] = [I]^x[R]^y[t]^z$$

$$L^2MT^{-2} = I^x\left(L^2MT^{-3}I^{-2}\right)^yT^z$$
$$L^2MT^{-2}I^0 = L^{2y}.M^y.T^{z-3y}I^{x-2y}$$

$2y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 1$
$z - 3y = -2 \quad \Rightarrow \quad z = 1$
$x = 2y \quad \Rightarrow \quad x = 2$

La fórmula para expresar el efecto Joule es:

$$Q = \boxed{I^2Rt}$$ **Rpta.**

10. En un proceso termodinámico isotérmico, le trabajo de expansión de un gas ideal se calcula con la fórmula:

$$W = nRT\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

En donde:

n : número de moles
T : temperatura
ln : logaritmo neperiano
V_1 y V_1 : volúmenes

Hallar la ecuación dimensional de la constante universal de los gases $[R]$.

a) $LMT^{-2}\theta^{-1}N^{-1}$ b) $L^2MT^{-2}\theta N^{-1}$
c) $L^2MT^{-2}\theta^{-1}N$ d) $L^2MT^{-2}\theta^{-1}N^{-1}$
e) $L^2MT^2\theta^{-1}N^{-1}$

Solución:
Aplicando ecuaciones dimensionales:

$$[W] = [n][R][T]\left[\ln\frac{V_2}{V_1}\right] \qquad \ldots (1)$$

n : cantidad de sustancia $\Rightarrow [n] = N$
T : Temperatura $\Rightarrow [T] = \theta$

$$\left[\ln\frac{V_2}{V_1}\right] = 1$$

Reemplazando en (1):

$$L^2MT^{-2} = N[R]\theta(1)$$
$$[R] = \boxed{L^2MT^{-2}\theta^{-1}N^{-1}}$$ **Rpta.**

11. Hallar la ecuación dimensional de l nombre del tu profesor $[MARCO]$ si la siguiente expresión es homogénea $\dfrac{A}{M^2} + \dfrac{M}{C} = \dfrac{\sqrt{O}}{C^2 + aL}$

Donde: a = aceleración, L = longitud
M = masa , R = resistencia eléctrica

a) $M^7L^4T^{-5}I^{-2}$ b) $M^4L^5T^{-7}I^4$
c) $M^3L^4T^{-5}I^{-3}$ d) $MLTI^{-1}$
e) MLT^8I^{-2}

Solución
Por el principio de homogeneidad dimensional se tiene que sus términos son iguales

$$\frac{A}{M^2} = \frac{M}{C} = \frac{\sqrt{O}}{C^2 + aL}$$

Igualando el último término se tiene

$$C^2 = aL \quad \Rightarrow \quad \left[C^2\right] = LT^{-2}.L$$

$$\Rightarrow [C] = LT^{-1}$$

Por otro lado igualando los 2 anteriores obtendremos $[A]$

$$[A] = \left[\frac{M^3}{C}\right] \Rightarrow \frac{M^3}{LT^{-1}} = L^{-1}M^3T$$

Ahora nos faltara el valor de $[O]$ igualando con el termino central y despejando $[O]$

$$\frac{M}{C} = \frac{\sqrt{O}}{C^2} \Rightarrow \sqrt{O} = MC \Rightarrow [O] = M^2L^2T^{-2}$$

Recuerde que la ecuación dimensional de la resistencia eléctrica es $L^2MT^{-3}I^{-2}$

$$[MARCO] = M.M^3L^{-1}T.L^2MT^{-3}I^{-2}.LT^{-1}.M^2L^2T^{-2}$$

$$[MARCO] = \boxed{L^4M^7T^{-5}I^{-2}}$$ **Rpta.**