EJEMPLOS DE OPERACIONES DE VECTORES

Ejemplo Ilustrativo 01

Dados los vectores $\overline{A} = 2i + 2j + k$ y $\overline{B} = -4i + 2j - 4k$. Calcular:

a) El producto escalar $\overline{A} \cdot \overline{B}$

b) El coseno del ángulo que forman los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$

c) El producto vectorial $\overline{A} \times \overline{B}$

Solución:

a) $\overline{A} \cdot \overline{B} = (2,\ 2,\ 1) \cdot (-4,\ 2, -4)$

$\overline{A} \cdot \overline{B} = -8 + 4 - 4 \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \cdot \overline{B} = \boxed{-8}$

b) $\cos\theta = \dfrac{\overline{A} \cdot \overline{B}}{\|\overline{A}\|\|\overline{B}\|} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{(2,\ 2,\ 1) \cdot (-4,\ 2, -4)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}\ \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2}}$

$$\cos\theta = \frac{-8 + 4 - 4}{3(6)}$$

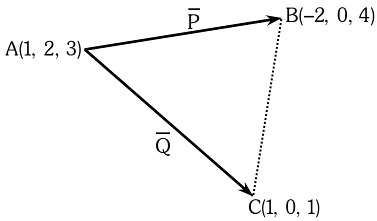
$$\cos\theta = \frac{-8}{18} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \boxed{-\frac{4}{9}}$$

c) $\overline{A} \times \overline{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-8 - 2)i - (-8 + 4)j + (4 + 8)k = \boxed{-10i + 4j + 12k}$ **Rpta.**

Ejemplo Ilustrativo 02

Determinar el área limitada por los puntos $(1,\ 2,\ 3)$; $(-2,\ 0,\ 4)$ y $(1,\ 0,\ 1)$.

Solución:
Graficando:



$\overline{P} = B - A = -3i - 2j + k$

$\overline{Q} = C - A = -2j - 2k$

Se sabe que:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left\|\overline{P}\times\overline{Q}\right\|$$

$$\overline{P}\times\overline{Q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 6j - 6k$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left\|\overline{P}\times\overline{Q}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-6)^2}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{19} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_\Delta = \sqrt{19}}$$ **Rpta.**

Ejemplo Ilustrativo 03

Hallar el volumen del tetraedro que forman los vectores:

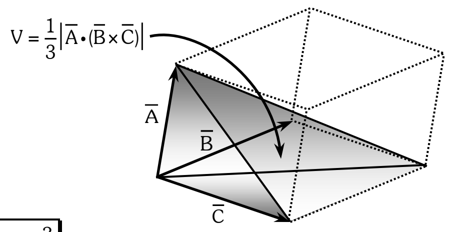
$$\overline{A} = i + j - 2k \ ; \ \overline{B} = 2i - 3j + k \ ; \ \overline{C} = -i + j - 3k$$

Solución:
El volumen del tetraedro es la tercera parte del volumen del paralelepípedo. Entonces por el producto triple:

$$V = \frac{1}{3}\overline{A}.(\overline{B}\times\overline{C})$$

Aplicando la solución del determinante:

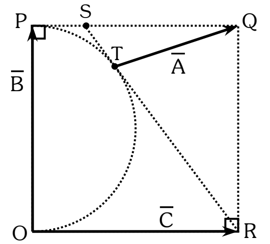
$$V = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left[1(8) - 1(-5) - 2(5)\right]$$



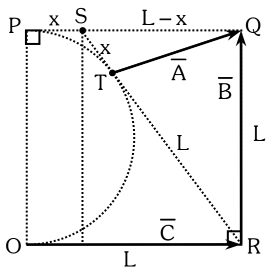
$$\boxed{V = 1\ u^3}$$ **Rpta.**

Ejemplo Ilustrativo 04

En la figura OPQR es un cuadrado, T es punto de tangencia a la semicircunferencia, expresar el vector $\overline{A}$ en función de los vectores $\overline{B}$ y $\overline{C}$.



Solución:



En el Δ RSQ por el Teorema de Pitágoras:

$$(L+x)^2 = (L-x)^2 + L^2$$

$$4xL = L^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{4}$$

En el triángulo vectorial RQS:

$$\overline{RS} = \overline{B} - \frac{3}{4}\overline{C} = \frac{4\overline{B} - 3\overline{C}}{4}$$

Además: $\|\overline{RS}\| = \frac{4}{5}\|\overline{RT}\|$

$$\overline{RT} = \frac{4}{5}\overline{RS} = \frac{4}{5}\left(\frac{4\overline{B} - 3\overline{C}}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \overline{RT} = \frac{4\overline{B} - 3\overline{C}}{5}$$

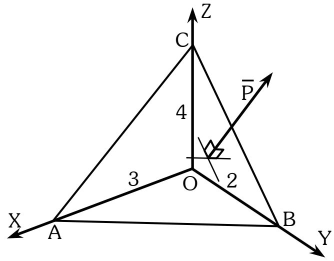
Luego en el triángulo vectorial RTQ

$$\overline{RT} + \overline{A} = \overline{B}$$

$$\overline{A} = \overline{B} - \frac{4\overline{B} - 3\overline{C}}{5} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} = \boxed{\frac{\overline{B} + 3\overline{C}}{5}}$$ **Rpta.**

Ejemplo Ilustrativo 05

De acuerdo al gráfico, un vector $\overline{P}$ tiene una dirección perpendicular al triángulo ABC, y posee un módulo de $8\sqrt{61}$. Encontrar una expresión vectorial cartesiana para $\overline{P}$.



Solución:

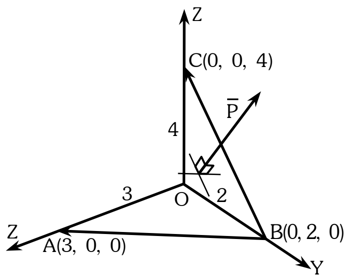
Coordenadas y vectores direccionales en el gráfico:

$A = (3,\ 0,\ 0)$	Expresiones vectoriales
$B = (0,\ 2,\ 0)$	$\overline{BA} = 3i - 2j$
$C = (0,\ 0,\ 4)$	$\overline{BC} = -2j + 4k$

Vector unitario perpendicular al plano ABC.

$$\overline{BC} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8i + 12j + 6k$$

$$\overline{U} = \frac{2(4i + 6j + 3k)}{2\sqrt{4^2 + 6^2 + 3^2}} \Rightarrow \overline{U} = \frac{4i + 6j + 3k}{\sqrt{61}}$$



Luego:

$$\overline{P} = \|\overline{P}\|\overline{U} = 8\cancel{\sqrt{61}}\left(\frac{4i + 6j + 3k}{\cancel{\sqrt{61}}}\right) \Rightarrow \boxed{\overline{P} = 8(4i + 6j + 3k)}$$ **Rpta.**