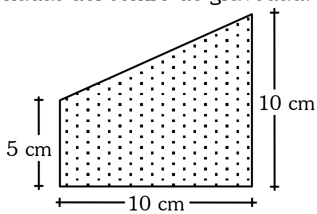
EJERCICIOS RESUELTOS

CENTRO DE GRAVEDAD

1. La figura mostrada es una lámina de acero de densidad uniforme, determinar las coordenadas del centro de gravedad.



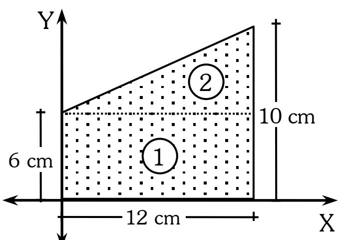
a) $(4{,}67;\ 4{,}67)$ b) $(6{,}33;\ 4{,}67)$

c) $(4{,}67;\ 4{,}67)$ d) $(6{,}67;\ 4{,}67)$

d) $(6{,}67;\ 3{,}67)$

Solución:

Dividimos el gráfico en figuras conocidas:



Elaborando una tabla:

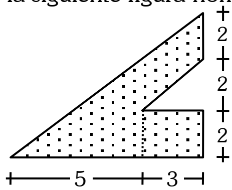
Fig.	x_i	y_i	A_i	x_iA_i	y_iA_i
1	6	3	72	432	216
2	8	8	36	288	288
			108	720	504

$$x_c = \frac{720}{108} \approx 6{,}67$$

$$y_c = \frac{504}{108} \approx 4{,}67$$

$\boxed{(6{,}67;\ 4{,}67)}$ **Rpta.**

2. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la siguiente figura homogénea.



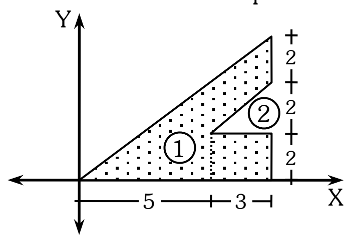
a) $(6{,}38;\ 1{,}13)$ b) $(6{,}38;\ 2{,}13)$

c) $(4{,}38;\ 0{,}13)$ d) $(6{,}38;\ 0{,}13)$

e) $(5{,}38;\ 0{,}18)$

Solución:

Asignamos números a los componentes:



Elaborando una tabla:

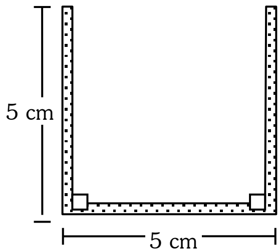
Fig.	x_i	y_i	A_i	x_iA_i	y_iA_i
1	$\frac{16}{3}$	2	24	128	$\frac{32}{3}$
2	2	$\frac{8}{3}$	–3	6	–8
			21	134	$\frac{8}{3}$

$$x_c = \frac{134}{21} \approx 6{,}38$$

$$y_c = \frac{\frac{8}{3}}{21} \approx 0{,}13$$

$\boxed{(6{,}38;\ 0{,}13)}$ **Rpta.**

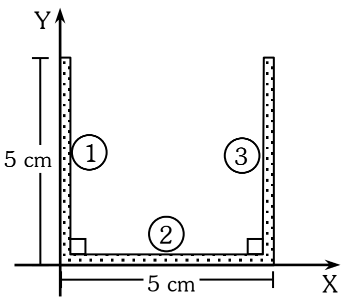
3. Hallar la suma de las coordenadas del centro de gravedad de la varilla doblada en U, que se muestra en la figura:



a) 4 b) 5 c) 4,5

d) 6 e) 4,8

Solución:



Elaborando una tabla:

Fig.	x_i	y_i	L_i	x_iL_i	y_iL_i
1	0	2,5	5	0	12,5
2	2,5	0	5	12,5	0
3	5	2,5	5	25	12,5
			15	37,5	37,5

$$x_c = \frac{37,5}{15} = \frac{375}{150} = \frac{5}{2}$$

$$y_c = \frac{37,5}{15} = \frac{375}{150} = \frac{5}{2}$$

$$x_c + y_c = \boxed{5}$$ **Rpta.**

4. Una varilla de 20 cm de largo se dobla en dos partes iguales formando un ángulo de 60°. ¿A qué distancia del vértice "O" se encuentra el centro de gravedad de la varilla doblada?

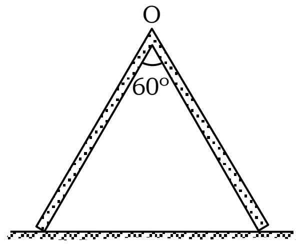
a) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$

b) $\frac{5}{3}\sqrt{3}$

c) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

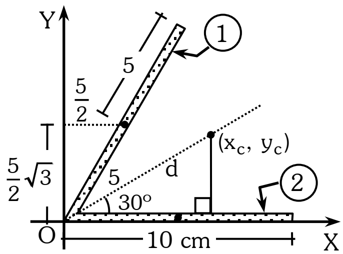
d) $\frac{7}{8}\sqrt{3}$

e) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$



Solución:

Ubicamos de manera conveniente en un eje de coordenadas:



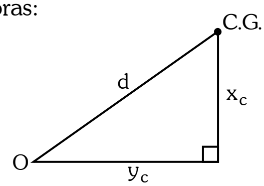
Construimos nuestra tabla:

Fig.	x_i	y_i	L_i	x_iL_i	y_iL_i
1	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}\sqrt{3}$	10	25	$25\sqrt{3}$
2	5	0	10	50	0
			20	75	$25\sqrt{3}$

Luego: $x_c = \frac{75}{20} = \frac{15}{4}$

$$y_c = \frac{25}{20}\sqrt{3} = \frac{5}{4}\sqrt{3}$$

Por Pitágoras:

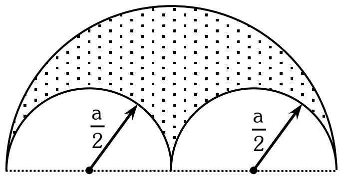


$$d^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\sqrt{3}\right)^2$$

$$d^2 = \frac{225}{16} + \frac{75}{16} = \frac{300}{16}$$

$$d = \boxed{\frac{5}{2}\sqrt{3}}$$ **Rpta.**

5. Hallar la coordenada y_C del C.G. de la placa mostrada.

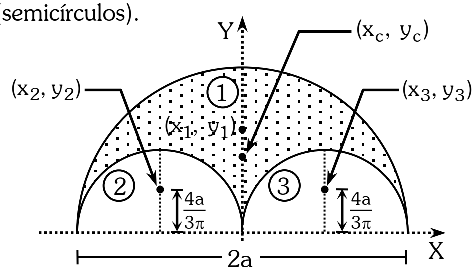


a) $\dfrac{2a}{3\pi}$ b) $\dfrac{3a}{2\pi}$ c) $\dfrac{2a}{\pi}$

d) $\dfrac{5a}{4\pi}$ e) $\dfrac{3a}{\pi}$

Solución:

Dividimos la placa en formas conocidas (semicírculos).



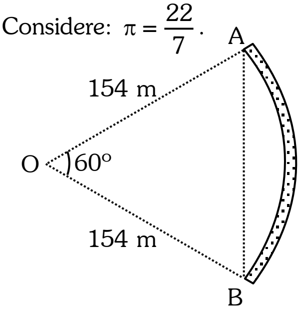
Elaboremos la tabla de valores:

	x_i	y_i	A_i	x_iA_i	y_iA_i
1	0	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{\pi}{2}a^2$	0	$\frac{2}{3}a^3$
2	$-\frac{a}{2}$	$\frac{2a}{3\pi}$	$-\frac{\pi}{8}a^2$	$\frac{\pi a^3}{16}$	$-\frac{a^3}{12}$
3	$\frac{a}{2}$	$\frac{2a}{3\pi}$	$-\frac{\pi}{8}a^2$	$-\frac{\pi a^3}{16}$	$-\frac{a^3}{12}$
			$\frac{\pi}{4}a^2$	0	$\frac{1}{2}a^3$

Luego:

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}a^3}{\frac{\pi}{4}a^2} \Rightarrow y_c = \boxed{\frac{2a}{\pi}}$$ **Rpta.**

6. Determinar la posición del C.G. de un carril de vía férrea curvada según se muestra en la figura. Si se sabe que el radio de curvatura es igual a 154 m. Considere: $\pi = \frac{22}{7}$.



a) 150 m

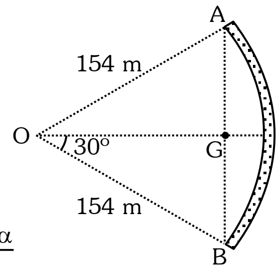
b) 145 m

c) 147 m

d) 152 m

e) 125 m

Solución:



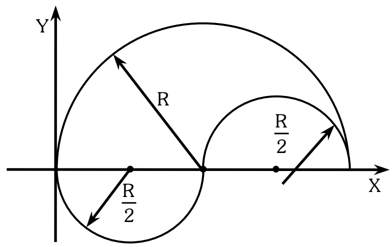
$$\overline{OG} = \frac{R\,\text{sen}\,\alpha}{\alpha}$$

$$\overline{OG} = \frac{154\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}$$

$$\overline{OG} = \frac{154(\frac{1}{2})}{\frac{1}{6}(\frac{22}{7})} = \frac{6(7)(77)}{22}$$

$$\overline{OG} = \boxed{147\ \text{m}}$$ **Rpta.**

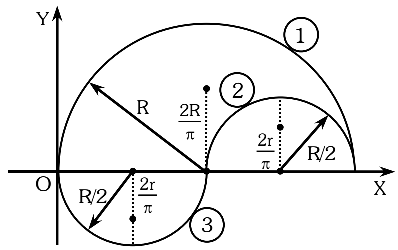
7. Hallar el centro de gravedad del alambre, en función de "R", con respecto al sistema de coordenadas que se indica.



a) $R\left(1,\ \frac{1}{2\pi}\right)$ b) $R\left(2,\ \frac{1}{\pi}\right)$ c) $R\left(1,\ \frac{1}{\pi}\right)$

d) $R\left(1,\ \frac{2}{\pi}\right)$ e) $R\left(1,\ \frac{4}{3\pi}\right)$

Solución:



Completamos nuestra tabla:

	x_i	y_i	L_i	x_iL_i	y_iL_i
1	R	$\frac{2R}{\pi}$	πR	πR^2	$2R^2$
2	$\frac{3R}{2}$	$\frac{R}{\pi}$	$\frac{\pi R}{2}$	$\frac{3\pi R^2}{4}$	$\frac{R^2}{2}$
3	$\frac{R}{2}$	$-\frac{R}{\pi}$	$\frac{\pi R}{2}$	$\frac{\pi R^2}{4}$	$-\frac{R^2}{2}$
			$2\pi R$	$2\pi R^2$	$2R^2$

De donde:

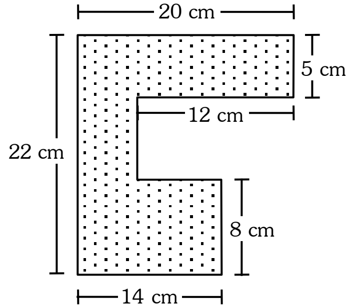
$$x_c = \frac{2\pi R^2}{2\pi R} = R$$

$$y_c = \frac{2R^2}{2\pi R} = \frac{R}{\pi}$$

Finalmente:

$$C.G. = \boxed{R\left(1,\ \frac{1}{\pi}\right)}$$ **Rpta.**

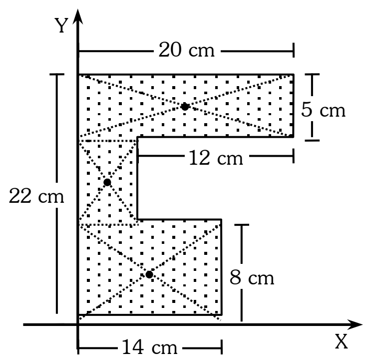
8. Determinar la posición del centro de gravedad de la placa que se muestra:



a) (7,58; 10,48) b) (7,50; 11,53)
c) (7,25; 11,06) d) (6,34; 10,65)
e) (7,31; 11,61)

Solución:

Dividimos la figura en formas conocidas:



Las áreas parciales son rectángulos, sus centros de gravedad son las intersecciones de sus diagonales.

	x_i	y_i	A_i	x_iA_i	y_iA_i
1	10	19,5	100	1000	1950
2	4	12,5	72	288	900
3	7	4	112	784	448
			284	2072	3298

$$x_c = \frac{2072}{284} \approx 7{,}30 \qquad y_c = \frac{3298}{284} \approx 11{,}61$$

Finalmente:

$\text{C.G.} = \boxed{(7{,}31;\ 11{,}61)}$ **Rpta.**

9. Sobre una esfera maciza de radio "R" se ha colocado un cono cuya base circular tiene su radio igual al de la esfera. ¿Qué altura debe tener dicho cono para que el C.G. del sistema se encuentre en el punto de contacto?

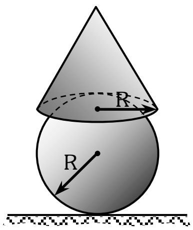
a) 3R

b) 4R

c) 2R

d) R

e) 5R



Solución:

Sea el origen de coordenadas el centro de gravedad (punto de contacto).

$\text{C.G.} = (x_c,\ y_c) = (0,\ 0)$

Cálculo de Volúmenes:

$$V_{cono} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$V_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

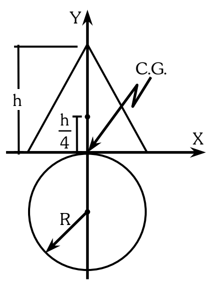


Fig.	y_i	V_i	y_iV_i
1	$\frac{h}{4}$	$\frac{\pi R^2 h}{3}$	$\frac{\pi R^2 h^2}{12}$
2	$-R$	$\frac{4\pi R^3}{3}$	$-\frac{4\pi R^4}{3}$

La coordenada y_c debe ser cero:

$$y_c = \frac{\frac{\pi R^2 h^2}{12} - \frac{4\pi R^4}{3}}{\frac{\pi R^2 h}{3} + \frac{4\pi R^3}{3}} = 0$$

$$\frac{\pi R^2 h^2}{12} = \frac{4\pi R^4}{3}$$

$$\frac{h^2}{4} = 4R^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 16R^2$$

$h = \boxed{4R}$ **Rpta.**

10. Calcular el ángulo de equilibrio para la plancha metálica semicircular mostrada.

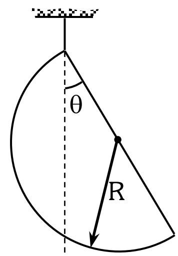
a) $\text{arc tan}\left(\frac{2}{3\pi}\right)$

b) $\text{arc tan}\left(\frac{4}{3\pi}\right)$

c) $\text{arc tan}\left(\frac{5}{3\pi}\right)$

d) $\text{arc cot}\left(\frac{4}{3\pi}\right)$

e) arc tan 2



Solución:

Por condición de equilibrio de un cuerpo suspendido, la vertical que contiene la cuerda debe pasar por su C.G. Además de ubicarse sobre su eje de simetría.

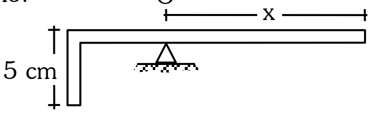
Se sabe que: $y = \frac{4R}{3\pi}$

En el triángulo rectángulo:

$$\tan\ \theta = \frac{\frac{4R}{3\pi}}{R} = \frac{4}{3\pi}$$

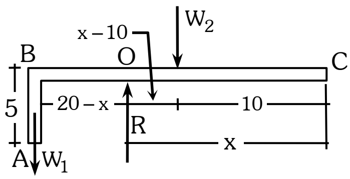
$\theta = \boxed{\text{arc tan}\left(\frac{4}{3\pi}\right)}$ **Rpta.**

11. Un alambre rígido homogéneo de 25 cm de longitud es doblado como se indica en la figura. ¿Cuánto debe medir "x" para mantener equilibrio?



a) 10 cm b) 15 cm c) 10 cm
d) 12 cm e) 16 cm

Solución:
D.C.L. de la barra



Como el alambre es homogéneo, su peso es proporcional a su longitud:

$\Sigma M_0 = 0$:

$W_1(20-x) - W_2(x-10) = 0$

$5k(20-x) = 20k(x-10)$

$$x = \boxed{12\text{ cm}}\ \textbf{Rpta.}$$

12. Determinar la coordenada y_c del centro de gravedad de la figura. $R = 4$ cm.

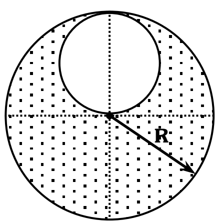
a) $-\dfrac{R}{4}$

b) $-\dfrac{R}{5}$

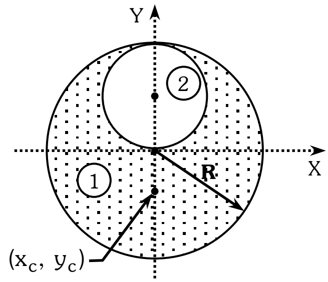
c) $-\dfrac{2R}{5}$

d) $-\dfrac{R}{6}$

e) $-\dfrac{3R}{8}$



Solución:
Ubicamos el origen de coordenadas en el centro del círculo mayor (Eje de simetría – eje Y).

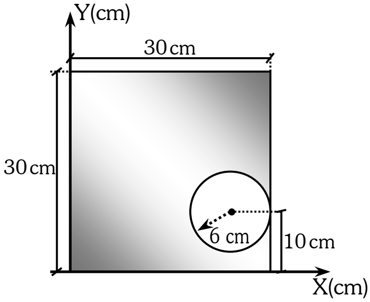


Elaborando el cuadro respectivo:

Fig.	y_i	A_i	y_iA_i
1	0	πR^2	0
2	$\dfrac{R}{2}$	$-\dfrac{\pi R^2}{4}$	$-\dfrac{\pi R^3}{8}$
		$\dfrac{3}{4}\pi R^2$	$-\dfrac{\pi R^3}{8}$

$$y_c = \frac{-\dfrac{\pi R^3}{8}}{\dfrac{3}{4}\pi R^2} \Rightarrow y_c = \boxed{-\frac{R}{6}}\ \textbf{Rpta.}$$

13. Encuentre las coordenadas del C.G. de la placa metálica de espesor uniforme. Considere $\pi = 3{,}1$.



- Hallando las coordenadas del centro de gravedad y las áreas respectivas.

Área	**X**	**Y**
900 cm^2	15	15
36π cm^2	24	10

Para la absisa

$$\bar{x} = \frac{A_1x_1 - A_2x_2}{A_1 - A_2} = \frac{900(15) - 36\pi(24)}{900 - 36\pi}$$

$$\bar{x} = 13{,}7 \text{ cm}$$

- Ahora para la ordenada.

$$\bar{y} = \frac{A_1y_1 - A_2y_2}{A_1 - A_2} = \frac{900(15) - 36\pi(10)}{900 - 36\pi}$$

$$\bar{y} = 15{,}7 \text{ cm}$$

- Entonces el centro de gravedad es:

C.G. = (13,7; 15,7)