EJERCICIOS RESUELTOS
ANALISIS VECTORIAL

1. Hallar el coseno del ángulo que forman los vectores $\overline{A} = 12i + 5j$ y $\overline{B} = 3i - 4j$

a) $\frac{16}{25}$ b) $\frac{16}{45}$ c) $\frac{16}{55}$
d) $\frac{16}{65}$ e) $\frac{8}{65}$

Solución:

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}\cdot\overline{B}}{\|\overline{A}\|\|\overline{B}\|}$$

$$\cos\theta = \frac{(12,\ 5)\cdot(3,\ -4)}{\sqrt{12^2+5^2}\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{36-20}{13(5)}$$

$$\cos\theta = \boxed{\frac{16}{65}}$$ **Rpta.**

2. Si se sabe que: $\overline{A} = (x-2)i - (4+x)j$ y $\overline{B} = -4i + xj$ son vectores paralelos. Hallar el valor positivo de "x"

a) 12 b) 10 c) 9
d) 8 e) 6

Solución:
Las componentes de ambos vectores deben ser proporcionales debido a que son múltiplos:

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{-4-x}{x}$$

$$x^2 - 2x = 16 + 4x$$

$$x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$\begin{matrix} x & -8 \\ x & +2 \end{matrix}$$

$$x = \boxed{8}$$ **Rpta.**

3. Si se sabe: $\overline{A} = 3i + (a+2)j$; $\overline{B} = -2ai + (a+1)j$ son perpendiculares determinar los valores de "a".

a) 1 y 2 b) 1 y 3 c) 2 y 3
d) 1 y –2 e) –2 y 3

Solución:
Por propiedad de perpendicularidad:

$$\overline{A}\cdot\overline{B} = 0 \ \Rightarrow\ 3(-2a) + (a+2)(a+1) = 0$$

$$-6a + a^2 + 3a + 2 = 0$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\begin{matrix} a & -2 & \Rightarrow & a = 2 \\ a & -1 & \Rightarrow & a = 1 \end{matrix}$$

$\boxed{1 \text{ y } 2}$ **Rpta.**

4. Dados los vectores: $\overline{A} = 2i + 3j$, $\overline{B} = i - 2j$ y $\overline{C} = -4i + j$. Hallar el valor de $m+n$, de tal forma que sea posible expresar la combinación lineal: $m\overline{A} + n\overline{B} = \overline{C}$

a) 8 b) 7 c) 6
d) 5 e) 4

Solución:

$$m(2,\ 3) + n(1,\ -2) = (-4,\ 1)$$

Igualando componentes:

$$\begin{cases} 2m + n = -4 \\ 3m - 2n = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$\times 2 \begin{cases} 2m + n = -4 \\ 3m - 2n = 1 \end{cases}$$

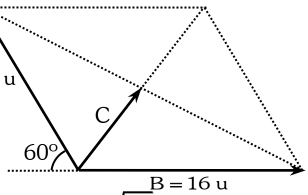
$$7m = -7 \ \Rightarrow\ \boxed{m = -1}$$

Sustituyendo:

$$2(-1) + n = 4 \ \Rightarrow\ \boxed{n = 6}$$

Luego: $m + n = \boxed{5}$ **Rpta.**

5. En la figura, calcular el módulo de la resultante del sistema de vectores:



a) $6\sqrt{11}$ b) $5\sqrt{13}$ c) $4\sqrt{13}$
d) $6\sqrt{13}$ e) $5\sqrt{10}$

Solución:

Resultante total: $R = 3C = \dfrac{3}{2}\|\overline{A}+\overline{B}\|$ … (1)

$$\|\overline{A}+\overline{B}\|^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$
$$\|\overline{A}+\overline{B}\|^2 = 12^2 + 16^2 + 2(12)(16)\cos 120^\circ$$
$$\|\overline{A}+\overline{B}\|^2 = 144 + 256 - 192$$
$$\|\overline{A}+\overline{B}\| = 4\sqrt{13}$$

Sustituyendo en (1):

$$R = \frac{3}{2}(4\sqrt{13}) \Rightarrow R = \boxed{6\sqrt{13}}$$ **Rpta.**

6. Hallar la superficie del triángulo formado por los puntos $A(3,\ 4)$, $B(-2,\ 5)$ y $C(5,\ -6)$.

a) $18\ u^2$ b) $20\ u^2$ c) $22\ u^2$
d) $24\ u^2$ e) $25\ u^2$

Solución:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \\ 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(15+12+20+8-25+18)$$

$$S = \frac{1}{2}(48) \Rightarrow S = \boxed{24\ u^2}$$ **Rpta.**

7. Dados dos vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$ de igual magnitud forman un ángulo θ. ¿En qué relación están los módulos de los vectores $\overline{A}+\overline{B}$ y $\overline{A}-\overline{B}$?

a) $\text{sen}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ b) $\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ c) $\tan^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$
d) $\cot^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ e) $\sec^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

Solución:

Se sabe que:

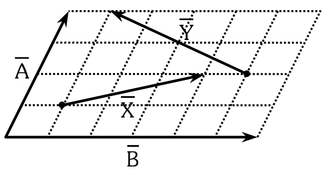
$$S = X^2 + X^2 + 2X^2\cos\theta = 2X^2(1+\cos\theta)$$
$$D = X^2 + X^2 - 2X^2\cos\theta = 2X^2(1-\cos\theta)$$

Dividiendo:

$$r = \frac{S}{D} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$r = \boxed{\cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$ **Rpta.**

8. En la figura expresar el vector $\overline{X}-\overline{Y}$ en función de los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$.



a) $\dfrac{11\overline{B}-3\overline{A}}{12}$ b) $\dfrac{13\overline{B}-3\overline{A}}{12}$ c) $\dfrac{11\overline{B}-\overline{A}}{12}$
d) $\dfrac{14\overline{B}-5\overline{A}}{12}$ e) $\dfrac{14\overline{B}-3\overline{A}}{12}$

Solución:

Utilizando $\overline{A}$ y $\overline{B}$ como ejes coordenados:

$$\overline{X} = \frac{3}{6}\overline{B} + \frac{1}{4}\overline{A} = \frac{1}{4}\overline{A} + \frac{1}{2}\overline{B}$$
$$\overline{Y} = -\frac{4}{6}\overline{B} + \frac{2}{4}\overline{A} = \frac{1}{2}\overline{A} - \frac{2}{3}\overline{B}$$

Restando los vectores:

$$\overline{X}-\overline{Y}=-\frac{1}{4}\overline{A}+\frac{7}{6}\overline{B}$$

$$\overline{X}-\overline{Y}=\boxed{\frac{14\overline{B}-3\overline{A}}{12}}$$ **Rpta.**

9. En la figura OPQR es un cuadrado, expresar el vector $\overline{X}$ como combinación lineal de los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

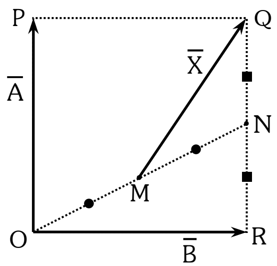
a) $\frac{2\overline{A}+3\overline{B}}{4}$

b) $\frac{3\overline{A}+2\overline{B}}{4}$

c) $\frac{3\overline{A}+\overline{B}}{2}$

d) $\frac{3\overline{A}-2\overline{B}}{4}$

e) $3\overline{A}+2\overline{B}$



Solución:
Por la ley del triángulo:

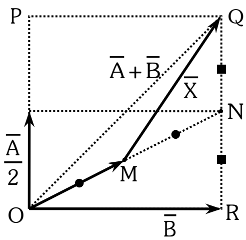
$$\overline{OM}+\overline{X}=\overline{A}+\overline{B}$$

Pero observe que:

$$2\overline{OM}=\frac{\overline{A}}{2}+\overline{B}$$

Luego:

$$\frac{\frac{\overline{A}}{2}+\overline{B}}{2}+\overline{X}=\overline{A}+\overline{B}$$



$$\overline{X}=\overline{A}+\overline{B}-\frac{\overline{A}+2\overline{B}}{4}$$

$$\overline{X}=\boxed{\frac{3\overline{A}+2\overline{B}}{4}}$$ **Rpta.**

10. En la figura OPQR es un cuadrado. Expresar el vector $\overline{C}$ en función de los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

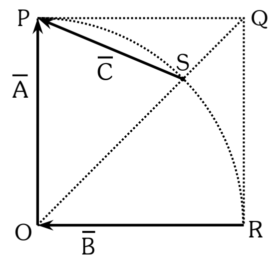
a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}\overline{A}+\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{B}$

b) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}\overline{B}+\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{A}$

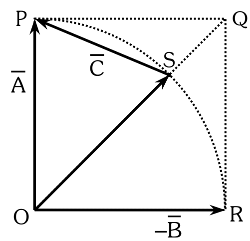
c) $\frac{\sqrt{2}-2}{2}\overline{A}+\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{B}$

d) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}\overline{A}+\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{B}$

e) $\frac{4-\sqrt{2}}{2}\overline{A}+\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{B}$



Solución:
Sea "L" lado del cuadrado:



Vector unitario en la dirección de $\overline{OS}$:

$$\overline{U}_{OS}=\frac{\overline{A}-\overline{B}}{L\sqrt{2}}$$

$$\overline{OS}=\cancel{L}.\frac{\overline{A}-\overline{B}}{\cancel{L}\sqrt{2}}=\frac{\overline{A}-\overline{B}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{A}-\overline{B})$$

En el triángulo OSP: $\overline{OS}+\overline{C}=\overline{A}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{A}-\overline{B})+\overline{C}=\overline{A}$$

$$\overline{C}=\boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\overline{A}+\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{B}}$$ **Rpta.**

11. En la figura OPQR expresar el vector $\overline{X}$ como combinación lineal de los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

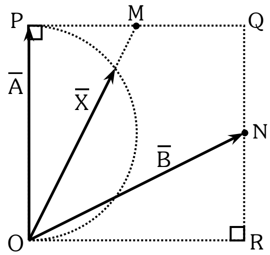
a) $3\overline{A}-2\overline{B}$

b) $4\overline{A}-3\overline{B}$

c) $\dfrac{3\overline{A}+2\overline{B}}{4}$

d) $\dfrac{2\overline{A}+3\overline{B}}{4}$

e) $\dfrac{3\overline{A}+2\overline{B}}{5}$



Solución:

En el gráfico:

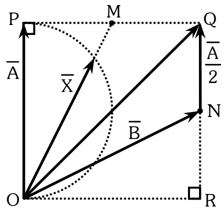


Fig. 1

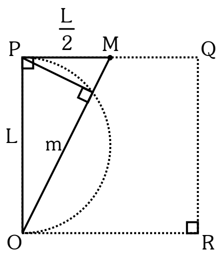


Fig. 2

$$\overline{OQ}=\overline{B}+\frac{\overline{A}}{2}=\frac{\overline{A}+2\overline{B}}{2}$$

$$\overline{OM}=\frac{\overline{A}+\overline{OQ}}{2}=\frac{\overline{A}+\dfrac{\overline{A}+2\overline{B}}{2}}{2}$$

$$\overline{OM}=\frac{3\overline{A}+2\overline{B}}{4}$$

Además: $\|\overline{OM}\|=\sqrt{L^2+\dfrac{L^2}{4}}=\dfrac{L}{2}\sqrt{5}$

En la figura 2 (Δ OPM) por relaciones métricas:

$$L^2=m\left(\frac{L}{2}\sqrt{5}\right)\quad\Rightarrow\quad m=\|\overline{X}\|=\frac{2}{5}L\sqrt{5}$$

Igualando vectores unitarios:

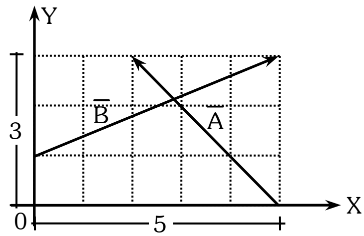
$$\frac{\overline{X}}{m}=\frac{\overline{OM}}{\|\overline{OM}\|}$$

$$\frac{\overline{X}}{\dfrac{2}{5}L\sqrt{5}}=\frac{\dfrac{3\overline{A}+2\overline{B}}{4}}{\dfrac{L}{2}\sqrt{5}}$$

$$\frac{5\overline{X}}{2}=\frac{3\overline{A}+2\overline{B}}{2}$$

$$\overline{X}=\boxed{\frac{3\overline{A}+2\overline{B}}{5}}$$ **Rpta.**

12. Utilizando los datos de la figura hallar el producto escalar de los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$.



a) 0 b) 3 c) –3

d) 9 e) –9

Solución:

Hallando los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$:

$\overline{A}=-3i+3j=(-3,\ 3)$

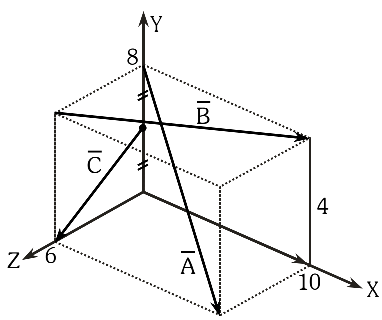
$\overline{B}=5i+2j=(5,\ 2)$

El producto escalar será:

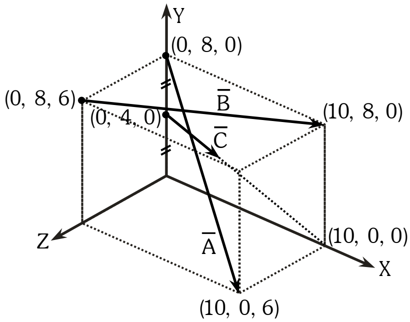
$\overline{A}\cdot\overline{B}=(-3,\ 3)\cdot(5,\ 2)=-15+6$

$$\overline{A}\cdot\overline{B}=\boxed{-9}$$ **Rpta.**

13. Hallar $\|\overline{C}\|$ en el paralelepípedo mostrado, si $(\overline{A}+\overline{B})\cdot\overline{C}=6\sqrt{29}$.



Solución:
Ubicando coordenadas:



$\overline{A} = 10i - 8j + 6k$

$\overline{B} = 10i - 6k$

Vector unitario en la dirección de $\overline{C}$:

$$\overline{U}_{\overline{C}} = \frac{10i - 4j}{\sqrt{10^2 + (-4)^2}}$$

$$\overline{U}_{\overline{C}} = \frac{1}{\sqrt{29}}(5i - 2j)$$

Expresión vectorial de $\overline{C}$:

$$\overline{C} = \|\overline{C}\|\overline{U}_{\overline{C}} = \frac{\|\overline{C}\|}{\sqrt{29}}(5i - 2j)$$

En la condición:

$$(\overline{A} + \overline{B}) \cdot \overline{C} = 6\sqrt{29}$$

$$\frac{\|\overline{C}\|}{\sqrt{29}}(20i - 8j) \cdot (5i - 2j) = 6\sqrt{29}$$

$$\|\overline{C}\|(100 + 16) = 6(29)$$

$$\|\overline{C}\| = \boxed{24}$$ **Rpta.**

14. Hallar el vector paralelo a $\overline{A} = 4i - 5j + 3k$; cuyo módulo es $3\sqrt{2}$.

a) $\frac{2}{5}(4i - 5j + 3k)$ b) $\frac{3}{5}(4i - 5j + 3k)$

c) $\frac{5}{3}(4i - 5j + 3k)$ d) $\frac{3}{4}(4i - 5j + 3k)$

e) $\frac{1}{5}(4i - 5j + 3k)$

Solución:

Vector unitario en la dirección de $\overline{A}$:

$$\overline{U}_{\overline{A}} = \frac{4i - 5j + 3k}{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + 3^2}}$$

$$\overline{U}_{\overline{A}} = \frac{4i - 5j + 3k}{\sqrt{50}}$$

$$\overline{U}_{\overline{A}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(4i - 5j + 3k)$$

El vector paralelo $\overline{B}$, será:

$$\overline{B} = 3\sqrt{2}\left[\overline{U}_{\overline{A}}\right] = \frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{5\cancel{\sqrt{2}}}(4i - 5j + 3k)$$

$$\overline{B} = \boxed{\frac{3}{5}(4i - 5j + 3k)}$$ **Rpta.**

15. Dados los vectores: $\overline{A} = 2i + aj - 3bk$ y $\overline{B} = 2ai - j + bk$; hallar el valor de "ab". Si $\overline{A} \perp \overline{B}$. Además: $a - b = 6$.

a) 7 b) 16 c) 27
d) 40 e) 36

Solución:
Por condición de perpendicularidad:

$$(2,\ a,\ -3b) \bullet (2a,\ -1,\ b) = 0$$

$$4a - a - 3b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b^2$$

Sustituyendo con la condición $a - b = 6$:

$$b + 6 = b^2$$

$$b^2 - b - 6 = 0$$

$$b \qquad -3 \quad \Rightarrow \quad b = 3 \quad \wedge \quad a = 9$$

$$b \qquad +2 \quad \Rightarrow \quad b = -2 \quad \wedge \quad a = 4$$

Finalmente de acuerdo a las alternativas:

$$ab = \boxed{27}$$ **Rpta.**

16. Hallar el módulo de la resultante del siguiente conjunto de vectores.

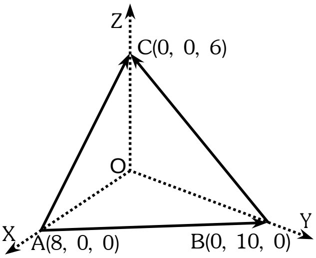
a) 12

b) 15

c) 16

d) 18

e) 20



Solución:
Restando coordenadas:

$$\overline{AB} = -8i + 10j$$

$$\overline{BC} = -10j + 6k$$

$$\overline{AC} = -8i + 6j$$

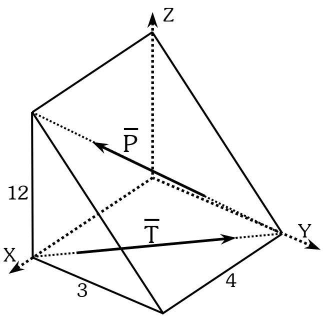
$$\overline{R} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$$

$$\overline{R} = -16i + 12k$$

$$\|\overline{R}\| = \sqrt{(-16)^2 + 12^2}$$

$$\|\overline{R}\| = \boxed{20}$$ **Rpta.**

17. Hallar el vector $\overline{F}$, si $\overline{F} = \overline{T} + \overline{P}$ sabiendo además que: $\|\overline{T}\| = 50$ N. $\|\overline{P}\| = 52$ N.



a) $-24i + 18j - 48k$

b) $24i + 18j + 48k$

c) $24i - 18j + 48k$

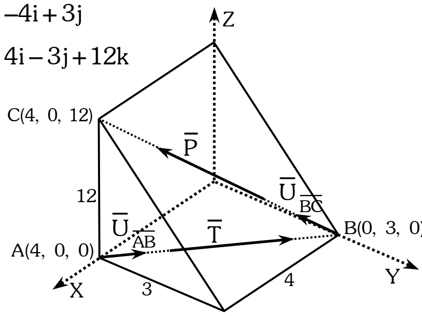
d) $12i + 18j + 48k$

e) $-24i + 18j + 48k$

Solución:
Ubicando las coordenadas:

$$\overline{AB} = -4i + 3j$$

$$\overline{BC} = 4i - 3j + 12k$$



Por definición de vector unitario:

$$\overline{T} = \|\overline{T}\|\overline{U}_{\overline{AB}} = 50\left(\frac{-4i + 3j}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}}\right)$$

$$\overline{T} = 50\,\frac{-4i + 3j}{5} \Rightarrow \boxed{\overline{T} = -40i + 30j}$$

$$\overline{P} = \|\overline{P}\|\overline{U}_{\overline{BC}} = 52\left(\frac{4i - 3j + 12k}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 12^2}}\right)$$

$$\overline{P} = 52\,\frac{4i - 3j + 12k}{13} \Rightarrow \boxed{\overline{P} = 16i - 12j + 48k}$$

Como: $\overline{F} = \overline{T} + \overline{P}$

$$\overline{F} = \boxed{-24i + 18j + 48k}$$ **Rpta.**

18. Hallar el módulo de la fuerza resultante de $\overline{F}$ y $\overline{T}$, si: $\|\overline{F}\| = 25$ N y $\|\overline{T}\| = 30$ N.

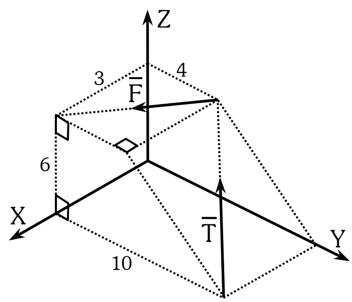
a) 42

b) 44

c) 45

d) 48

e) 50

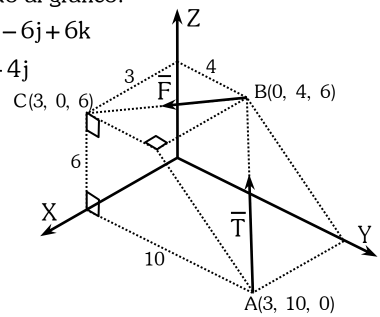


Solución:

De acuerdo al gráfico:

$\overline{AB} = -3i - 6j + 6k$

$\overline{BC} = 3i - 4j$



Expresión vectorial de $\overline{T}$:

$$\overline{T} = \|\overline{T}\| \overline{U}_{\overline{AB}} = 30\left(\frac{-3i - 6j + 6k}{\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 6^2}}\right)$$

$$\overline{T} = 30\left(\frac{-3i - 6j + 6k}{9}\right)$$

$$\boxed{\overline{T} = -10i - 20j + 20k}$$

Expresión vectorial de $\overline{F}$:

$$\overline{F} = \|\overline{F}\| \overline{U}_{\overline{BC}} = 25\frac{3i - 4j}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$\overline{F} = 25\left(\frac{3i - 4j}{5}\right) \Rightarrow \boxed{\overline{F} = 15i - 20j}$$

De donde la resultante: $\overline{R} = \overline{F} + \overline{T}$

$\overline{R} = 5i - 40j + 20k$

$$\|\overline{R}\| = \sqrt{5^2 + (-40)^2 + 20^2}$$

$$\|\overline{R}\| = \boxed{45\ \text{N}}$$ **Rpta.**